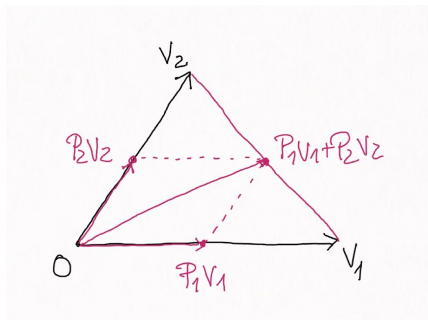
Guía 2

Preliminares y notación

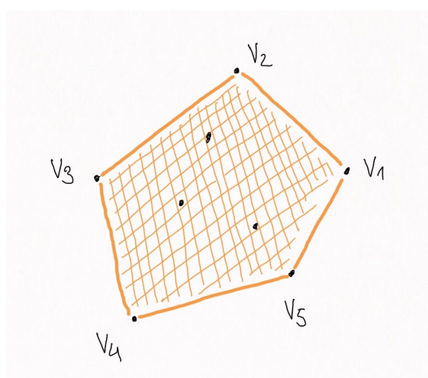
1. Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dos conjuntos. Una *aplicación* (o *función*) $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$, es una relación entre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ que a cada elemento $x \in \mathcal{X}$ le asigna un único elemento del conjunto $\mathcal{Y}$ que se denota mediante $f(x)$.
2. Con $\mathrm{id}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ se denota la aplicación identidad de $\mathcal{X}$:
$$\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(x) = x \text{ cualquiera sea } x \in \mathcal{X}.$$
3. Sea $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una aplicación de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$.
   - Dados $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$, si $f(x) = y$ se dice que *y es la imagen de x por f* y que *x es imagen inversa de y*. El conjunto de todas las imágenes inversas de y por f, se denomina *la preimagen de y en $\mathcal{X}$* y se designa con $f^{-1}(y)$
   $$f^{-1}(y) := \{x \in \mathcal{X} : f(x) = y\}.$$
   - Se dice que f es *inyectiva* si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$ cualesquiera sean $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, o equivalentemente si $f(x_1) \neq f(x_2)$ cada vez que $x_1 \neq x_2$. Notar que f es inyectiva si, y sólo si para cualquier $y \in \mathcal{Y}$, la ecuación $f(x) = y$ admite como máximo una solución en $\mathcal{X}$.
   - Se dice que f es *sobreyectiva* si para todo $y \in \mathcal{Y}$ existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) = y$. Notar que f es sobreyectiva si, y sólo si para cualquier $y \in \mathcal{Y}$, la ecuación $f(x) = y$ admite como mínimo una solución en $\mathcal{X}$.
   - Se dice que f es *biyectiva* si f es inyectiva y sobreyectiva. Notar que f es biyectiva si, y sólo si para cualquier $y \in \mathcal{Y}$, la ecuación $f(x) = y$ admite exactamente una solución en $\mathcal{X}$.
   - Si $X \subseteq \mathcal{X}$, el conjunto de todas las imágenes de elementos de X por f se designa por $f(X)$
   $$f(X) := \{f(x) : x \in X\} = \{y \in \mathcal{Y} : \text{ existe } x \in X \text{ tal que } f(x) = y\}$$
   y se denomina *el conjunto imagen de X por f*.
   - *La imagen de f* es el conjunto $f(\mathcal{X})$. Notar que f es sobreyectiva si, y sólo si $f(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$.
   - Si $Y \subseteq \mathcal{Y}$, el conjunto de todos aquellos elementos de $\mathcal{X}$ cuyas imágenes pertenecen a Y se designa con $f^{-1}(Y)$
   $$f^{-1}(Y) := \{x \in \mathcal{X} : f(x) \in Y\}$$
   y se denomina *la preimagen de Y en $\mathcal{X}$*.
4. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ conjuntos. Sean $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ y $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ dos aplicaciones. La *composición de g con f* es la aplicación
$$g \circ f : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$$
definida por $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ para todo $x \in \mathcal{X}$.
5. Los símbolos $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ están reservados para designar $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.

6. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y sea $\mathcal{V} = \{v_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{V}$ un conjunto de n puntos de $\mathbb{V}$. Se dice que $v \in \mathbb{V}$ es una *combinación lineal convexa* de elementos de $\mathcal{V}$ si
$$v = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i$$
para algunos $p_1, p_2, \ldots p_n \in \mathbb{R}^+$ tales que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.



Combinaciones lineales convexas de $\{v_1, v_2\}$. Los puntos de la forma $v = p_1 v_1 + p_2 v_2$, con $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ y $p_1 + p_2 = 1$ constituyen los puntos del segmento de recta que unen a los puntos v_1 y v_2. En el ejemplo, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

7. El conjunto $C(\mathcal{V})$ de todas las combinaciones lineales convexas de elementos de $\mathcal{V}$
$$C(\mathcal{V}) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i v_i : p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$
se llama la *cápsula convexa* del conjunto $\mathcal{V}$.



Forma de la cápsula convexa $C(\mathcal{V})$ de un conjunto de puntos $\mathcal{V}$ contenidos en un plano: se trata de la región encerrada por un polígono cuyos vértices son algunos de los puntos de $\mathcal{V}$.

8. El conjunto de todas las transformaciones lineales de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ se denota por $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Cuando $\mathbb{W} = \mathbb{V}$, escribimos $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ en lugar de $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.

9. Con $\mathbf{0} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ denotamos la transformación lineal nula de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$.
10. Con $I_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ denotamos la transformación lineal identidad de $\mathbb{V}$. Cuando el contexto sea inequívoco escribiremos I en lugar de $I_{\mathbb{V}}$.
11. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ se dice que
    - T *es un monomorfismo* cuando T es inyectiva,
    - T *es un epiformismo* cuando T es sobreyectiva,
    - T *es un isomorfismo* cuando T es biyectiva.
12. $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ se dicen *isomorfos* cuando existe un isomorfismo de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$.
13. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.
    - La preimagen de $0_{\mathbb{W}}$ en $\mathbb{V}$ se llama *el núcleo de* T y se denota por $\mathrm{Nu}(T)$
    $$\mathrm{Nu}(T) := \{v \in \mathbb{V} : T(v) = 0_{\mathbb{W}}\}.$$
    - La imagen de T se denota por $\mathrm{Im}(T)$
    $$\mathrm{Im}(T) := \{T(v) : v \in \mathbb{V}\}.$$
14. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Los símbolos T^k con $k \in \mathbb{N}_0$ se utilizan para denotar las transformaciones lineales definidas por: $T^0 := I$, $T^1 := T$, $T^2 := T \circ T$, $T^3 := T \circ T^2$, etcétera.
15. Cuando las letras del abecedario no son suficientes se recurre a las letras griegas. He aquí la equivalencia con el abecedario de las letras griegas que usamos a lo largo de esta guía.

Figura	Nombre	Equivalencia	Figura	Nombre	Equivalencia
$A\ \alpha$	Alfa	A	$\Pi\ \pi$	Pi	P
$B\ \beta$	Beta	B	$\Sigma\ \sigma$	Sigma	S
$\Delta\ \delta$	Delta	D	$\Phi\ \phi$	Phi	Ph (f)
$\Theta\ \theta$	Theta	Th (t)	$\Omega\ \omega$	Omega	O larga
$\Lambda\ \lambda$	Lambda	L			

16. La expresión ϕ *es una funcional lineal de* $\mathbb{V}$ significa que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$.
17. Dado $k \in \mathbb{N}$, $[0 : k]$ denota el conjunto $\{0, 1, \dots, k\} \subset \mathbb{N}_0$.
18. En todo lo que sigue $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
19. Dado $v \in \mathbb{K}^n$, v^* es el traspuesto conjugado del vector v. Esto es, $v^* = \overline{v^T}$. Observar que cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $v^* = v^T$.
20. Dada $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $A^* \in \mathbb{K}^{n\times m}$ es la matriz traspuesta conjugada de A. Esto es, $A^* = \overline{A^T}$. Observar que cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A^* = A^T$.
21. Dados $i \in \mathbb{I}_m$ y $j \in I_n$, la matriz de $\mathbb{K}^{m\times n}$ con 1 en la entrada ij y ceros en cualquier otra entrada, $E_{ij} := [\delta_{pi}\delta_{qj}]_{\substack{p\in\mathbb{I}_m \\ q\in\mathbb{I}_n}}$ se llama *la matriz* ij *de la base canónica de* $\mathbb{K}^{m\times n}$. Por ejemplo, las matrices E_{ij} de la base canónica de $\mathbb{K}^{2\times 2}$ son
$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
22. El conjunto $\{E_{ij} : i \in \mathbb{I}_m, j \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{K}^{m\times n}$ se llama la base canónica de $\mathbb{K}^{m\times n}$.
23. Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, su traza es el número $\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ que se obtiene de sumar todos los elementos de la diagonal principal de A.

24. El conjunto $\{x^j : j \in [0:n]\} \subset \mathbb{K}_n[x]$ se llama la base canónica de $\mathbb{K}_n[x]$, y el conjunto $\{x^j : j \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{K}[x]$ se llama la base canónica de $\mathbb{K}[x]$.
25. El símbolo $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$ se utiliza para designar al conjunto de las funciones infinitamente derivables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{K}$.
26. La letra D está reservada para designar el operador de derivación $D : C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$ definido por
$$D[y] := \frac{dy}{dx}.$$
27. **Principio de inducción.** Sea $\mathcal{P}(k)$ una función proposicional con $k \in \mathbb{N}$. Si
    (1) La primera proposición $\mathcal{P}(1)$ es verdadera; y
    (H.I.) para cada $k \in \mathbb{N}$, bajo la hipótesis de la validez de $\mathcal{P}(k)$ puede deducirse la validez de la proposición $\mathcal{P}(k+1)$,

    entonces, $\mathcal{P}(k)$ es verdadera para todo $k \in \mathbb{N}$.[1]
28. Toda $L \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K}))$ que tenga la forma
$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I,$$
con $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ se denomina *operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes*. El polinomio $p \in \mathbb{K}_n[x]$ que se obtiene de L intercambiando papeles entre D y x
$$p(x) = x^n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}x^{n-k},$$
se denomina *el polinomio característico del operador L*. Se puede demostrar que: si p se factoriza en la forma
$$p(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-\lambda_i)^{k_i},$$
donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ y $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ son tales que $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$, entonces L se factoriza de manera análoga
$$L = \prod_{i=1}^{r} (D-\lambda_i I)^{k_i}.$$
La prueba está basada sobre el principio de inducción y en la propiedad conmutativa de los operadores diferenciales de la forma $D - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, con respecto a la composición.[2]

[1] Este principio deberá ponerse en práctica en el **Ejercicio 2.27**.
[2] Este hecho será utilizado desde el **Ejercicio 2.30** hasta el **Ejercicio 2.34**.

2.1 Verificar que las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales.

(**a**) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $T_1\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T\right) := -3x_2 + 2x_3$.

(**b**) $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_2\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T\right) := \begin{bmatrix} -3x_2 + 2x_3 & 3x_1 - x_3 \end{bmatrix}^T$.

(**c**) $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T_3\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T\right) := \begin{bmatrix} -3x_2 + 2x_3 & 3x_1 - x_3 & -2x_1 + x_2 \end{bmatrix}^T.$$

2.2 Usando que toda transformación lineal $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ verifica que

$$T(a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k) = a_1 T(v_1) + \cdots + a_k T(v_k)$$

para cualquier cantidad k de vectores $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n$ y escalares $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, comprobar que

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} T(e_1) & \cdots & T(e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T.$$

Concluir que todas las transformaciones lineales de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$ son de la forma $T(x) = A_T x$, donde $A_T \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es la matriz definida por

$$A_T := \begin{bmatrix} T(e_1) & \cdots & T(e_n) \end{bmatrix}.$$

:*¿cuáles son las matrices A_{T_1}, A_{T_2}, A_{T_3} de las transformaciones lineales T_1, T_2, T_3 definidas en el* **Ejercicio 2.1***?*

2.3 [ver **Ejercicio 1.32**] Sea $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 \\ -x_1 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 \\ -x_1 + 3x_3 - 5x_4 + 3x_5 \\ -x_1 + 3x_3 - 6x_4 + 4x_5 \\ -x_1 + 3x_3 - 6x_4 + 4x_5 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar una base del núcleo de T.

(**b**) Hallar una base de la imagen de T.

(**c**) Comprobar que el vector $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$ pertenece a la imagen de T y resolver la ecuación $T(x) = b$.

2.4 Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) \end{bmatrix}^T.$$

(**a**) Explicar por qué T es una transformación lineal.

(**b**) Hallar una base del núcleo de T.

(**c**) Mostrar que para cada $j \in \mathbb{I}_3$, la ecuación $T(p) = e_j$ admite solución y hallar todas las soluciones de la misma.

(**d**) Resolver la ecuación $T(p) = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 36 \end{bmatrix}^T$.

2.5 Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación definida por

$$T(p) = p + (1 - x)p'.$$

(**a**) Explicar por qué T está bien definida y es una transformación lineal.

(**b**) Hallar una base del núcleo de T.

(**c**) Hallar una base de la imagen de T.

(**d**) Comprobar que el polinomio $q = 1 + x + x^2 - x^3$ pertenece a la imagen de T y resolver la ecuación $T(p) = q$.

2.6 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} bx_3 - x_2 & x_1 - ax_3 & ax_2 - bx_1 \end{bmatrix}^T,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}.$$

Comprobar que $y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}^T \in \operatorname{Im}(T)$ y resolver la ecuación $T(x) = y$.

2.7 Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, y $\mathcal{V} = \{v_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{V}$ un conjunto de n puntos de $\mathbb{V}$. Comprobar que la imagen de la cápsula convexa de $\mathcal{V}$ por T es la capsula convexa de la imagen de $\mathcal{V}$ por T. En símbolos, $T(C(\mathcal{V})) = C(T(\mathcal{V}))$.

: *leer los puntos* 6. *y* 7. *de preliminares y notación.*

2.8 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

y sean e_1, e_2 los vectores de la base canónica $\mathbb{R}^2$: $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Hallar y graficar la imagen por T del conjunto $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ definido por

(**a**) $\mathcal{R} = \{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$.

(**b**) $\mathcal{R}$ es el segmento de recta que une a los puntos e_1 y e_2, es decir, $\mathcal{R} = C(\{e_1, e_2\})$.

(**c**) $\mathcal{R}$ es el triángulo de vértices $0, e_1, e_2$, es decir, $\mathcal{R} = C(\{0, e_1, e_2\})$.

(**d**) $\mathcal{R}$ es el cuadrado de vértices $0, e_1, e_2, e_1+e_2$, es decir, $\mathcal{R} = C(\{0, e_1, e_2, e_1+e_2\})$.

(**e**) $\mathcal{R}$ es el paralelogramo de vértices $0, e_1 + e_2, e_1 - e_2, 2e_1$, es decir,

$$\mathcal{R} = C(\{0, e_1 + e_2, e_1 - e_2, 2e_1\}).$$

2.9 Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \end{bmatrix}^T, \\
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \\
T\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \\
T\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 5 & 1 & a^2 \end{bmatrix}^T.
\end{aligned}$$

2.10 Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\},$$

y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que actúa sobre la base $\mathcal{B}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}^T, \\
T\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} -3 & \frac{9}{2} & -6 \end{bmatrix}^T, \\
T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}^T.
\end{aligned}$$

(**a**) Hallar una base del núcleo de T y describirlo geométricamente.

(**b**) Hallar una base de la imagen de T y describirla geométricamente.

(**c**) Hallar $T\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T\right)$ y usar ese resultado para calcular $T\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T\right)$.

2.11 Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \right\},$$

y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal que actúa sobre la base $\mathcal{B}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\right) &= 1 - x, \\ T\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right) &= 1 + x^2, \\ T\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T\right) &= x + x^2. \end{aligned}$$

Comprobar que el polinomio $p = 2+x+3x^2$ pertenece a la imagen de T y determinar $T^{-1}(p) := T^{-1}(\{p\})$.

2.12 Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & -2 & 2\end{bmatrix}^T\right\},$$

y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que actúa sobre la base $\mathcal{B}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix}2 & -1 & -1\end{bmatrix}^T, \\ T\left(\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\end{bmatrix}^T, \\ T\left(\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(**a**) Hallar la imagen por T del subespacio gen $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1 & 5\end{bmatrix}^T\right\}$.

(**b**) Hallar la preimagen por T del subespacio $\left\{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 - y_3 = 0, y_1 + y_2 + y_3 = 0\right\}$.

2.13 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ con $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ de dimensión finita. Sea $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ la matriz de T con respecto a las bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ y $\mathcal{C}$ de $\mathbb{W}$. Verificar las siguientes afirmaciones.

(**a**) T es monomorfismo si, y sólo si, nul $\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right) = \{0\}$.

(**b**) T es epimorfismo si, y sólo si, col $\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right) = \mathbb{K}^{\dim(\mathbb{W})}$.

(**c**) T es isomorfismo si, y sólo si, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ es inversible.

2.14 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, donde $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son algunos de los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{R}_n[x]$. Hallar, para cada uno de los siguientes casos, la matriz de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, y analizando las propiedades de dicha matriz determinar las propiedades de T.

(**a**) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6\end{bmatrix}.$$

(**b**) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

(**c**) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4$ es la transformación lineal definida por

$$T(p) := \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(10) & p(100) \end{bmatrix}^T.$$

(**d**) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ es la transformación lineal definida por

$$T(p) := \begin{bmatrix} p(0) & p(1) \\ p'(0) & p'(1) \end{bmatrix}.$$

2.15 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{1 + x^2, 1 + x, x + x^2\right\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

(**a**) Analizar las propiedades de T.

(**b**) Hallar $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right)$.

2.16 Sean $\mathbb{V} = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^T = A\right\}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices simétricas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde es la matriz de T con respecto a las bases $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{V}$ y $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$ de $\mathbb{R}^3$. Hallar el conjunto solución de la ecuación $T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

2.17 [ver **Ejercicio 1.26**] Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2}x(x-1), -x(x-2), \frac{1}{2}(x-1)(x-2) \right\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

(**a**) Analizar las propiedades de T.

(**b**) Hallar la matriz de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

(**c**) Hallar la matriz de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(**d**) Hallar la matriz de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$.

(**e**) Hallar la imagen por T del subespacio $\operatorname{gen}\left\{2 + 3x + 2x^2, 5 + 5x + 4x^2\right\}$.

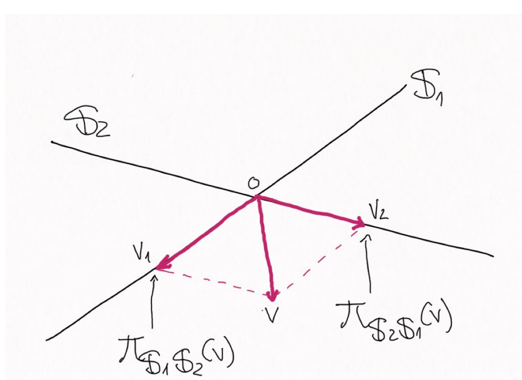
2.18 Sea $T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida en el **Ejercicio 2.10**, y sea $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[x])$ la transformación lineal definida por

$$T_2\left(\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T\right) := (a+b) + (a+c)x + (b+c)x^2.$$

(**a**) Hallar las matrices de T_1, T_2 y T_2^{-1} con respecto a las bases canónicas que correspondan.

(**b**) Hallar la matriz de $T_1 \circ T_2^{-1}$ con respecto a las mismas bases y utilizarla para hallar una base de $\operatorname{Nu}(T_1 \circ T_2^{-1})$.

2.19 Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ dos subespacios suplementarios de $\mathbb{V}$, esto es, todo vector $v \in \mathbb{V}$ se escribe de manera única como $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in \mathbb{S}_1$ y $v_2 \in \mathbb{S}_2$.



La proyección de $\mathbb{V}$ *sobre* $\mathbb{S}_1$ *en la dirección de* $\mathbb{S}_2$, denotada por $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$, es la transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ definida por

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) := v_1.$$

Análogamente, se define $\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}$ por $\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v) := v_2$.

(**a**) Explicar por qué $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ es la única transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ tal que

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in \mathbb{S}_1, \\ 0 & \text{si } v \in \mathbb{S}_2, \end{cases}$$

y comprobar que $\mathbb{V} = \mathrm{Im}\,(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}) \oplus \mathrm{Nu}\,(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2})$.

(**b**) Comprobar que $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ posee la propiedad de *idempotencia*: $\Pi^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$.

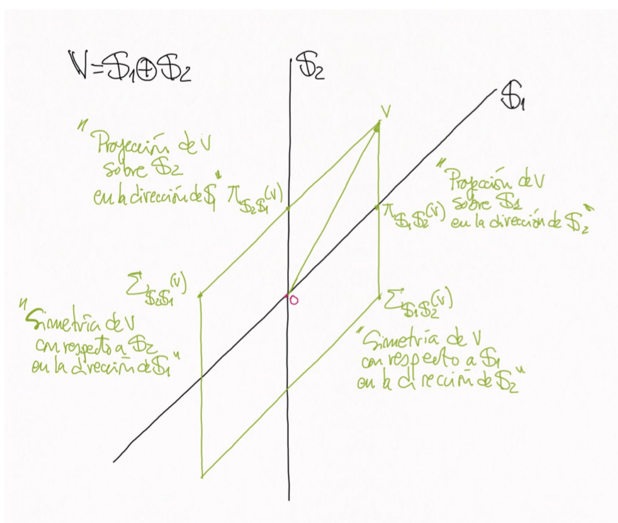
(**c**) Observar que $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} + \Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} = I_{\mathbb{V}}$.

(**d**) Mostrar que $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} := I_{\mathbb{V}} - 2\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}$ es la única transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ tal que

$$\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in \mathbb{S}_1, \\ -v & \text{si } v \in \mathbb{S}_2, \end{cases}$$

razón por la cual $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ de denomina *la simetría de* $\mathbb{V}$ *con respecto a* $\mathbb{S}_1$ *en la dirección de* $\mathbb{S}_2$.

(**e**) Explicar por qué $\Sigma^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} = I_{\mathbb{V}}$.



Proyecciones y simetrías inducidas por una partición de $\mathbb{V}$ en suma directa de dos subespacios $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$.

2.20 Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{V}$, $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{V}$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \text{gen}\{v_1 - 2v_2, v_1 + v_3\}, \quad \mathbb{S}_2 = \text{gen}\{v_2 - v_3\}.$$

(**a**) Comprobar que $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$.

(**b**) Hallar las matrices con respecto a la base $\mathcal{B}$ de las proyecciones y simetrías inducidas por la partición $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$.

2.21 , Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 11 \\ 5 & 9 & 6 \\ 0 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

(**a**) Comprobar que $\mathbb{R}^3 = \text{nul}(A) \oplus \text{fil}(A)$.

(**b**) Hallar las matrices con respecto a la base canónica de las proyecciones y simetrías inducidas por la partición $\mathbb{R}^3 = \text{nul}(A) \oplus \text{fil}(A)$.

2.22 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Hallar la matriz con respecto a la base canónica de la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre $\text{Im}(T)$ en la dirección de $\text{Nu}(T)$.

2.23 Verificar las siguientes afirmaciones.

(**a**) Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces T es la proyección de $\mathbb{V}$ sobre $\text{Im}(T)$ en la dirección de $\text{Nu}(T)$.

(**b**) Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces $S = I_{\mathbb{V}} - 2T$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$.

(**c**) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces $T = \frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)$ es tal que $T^2 = T$.

(**d**) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces S es la simetría de $\mathbb{V}$ con respecto a $\text{Nu}\left(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)\right)$ en la dirección de $\text{Im}\left(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)\right)$.

(**e**) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces $\mathbb{V} = \text{Nu}(S - I_{\mathbb{V}}) \oplus \text{Nu}(S + I_{\mathbb{V}})$.

2.24 Sean $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ las transformaciones lineales definidas por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \ \text{y} \ S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Comprobar que T es una proyección y hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(**b**) Comprobar que S es una simetría y hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.25 Sea $\mathrm{O}(2,\mathbb{R}) := \{R_\theta, S_\theta : \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$R_\theta\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$
$$S_\theta\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar y graficar la imagen de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ por $R_{\pi/3}$ y explicar el significado geométrico de la acción de $R_{\pi/3}$ sobre los vectores de $\mathbb{R}^2$.

(**b**) Hallar y graficar la imagen de la base

$$\left\{\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\right\}$$

por $S_{\pi/3}$ y explicar el significado geométrico de la acción de $S_{\pi/3}$ sobre los vectores de $\mathbb{R}^2$.

(**c**) Hallar y graficar la imagen de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ por R_θ y explicar el significado geométrico de la acción de R_θ sobre los vectores de $\mathbb{R}^2$.

(**d**) Comprobar que

$$\left\{\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \operatorname{sen}(\theta/2) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^2$ y hallar su imagen por S_θ.

(**e**) ¿Cuál es el signficado geométrico de la acción de S_θ sobre los vectores de $\mathbb{R}^2$?

(**f**) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hallar las matrices respecto a la base canónica de las siguientes transformaciones lineales, y en cada caso explicar su significado geométrico:

$$R_\alpha \circ R_\beta; \quad S_\alpha \circ S_\beta, \quad S_\alpha \circ R_\beta, \quad R_\beta \circ S_\alpha.$$

(**g**) Concluir que el conjunto $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ es cerrado por composiciones.

(**h**) Observar que $R_0 = I_{\mathbb{R}^2}$.

(**i**) Comprobar que R_θ y S_θ son isomorfismos y hallar R_θ^{-1} y S_θ^{-1}.

2.26 Observar que la transformación lineal $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$R\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\right) := \begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0\end{bmatrix}^T,$$
$$R\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right) := \begin{bmatrix}-\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\end{bmatrix}^T,$$
$$R\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right) := \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T,$$

es la rotación de ángulo θ en sentido antihorario del plano xy alrededor del eje z.

(**a**) Hallar y graficar la imagen de los siguientes vectores por la rotación de ángulo $\pi/4$ en sentido antihorario del plano xy alrededor del eje z:

$$v_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, v_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, v_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T.$$

(**b**) Hallar la matriz respecto de la base canónica de la rotación de ángulo θ en sentido antihorario del plano yz alrededor del eje x.

(**c**) Hallar la matriz respecto de la base canónica de la rotación de ángulo θ en sentido antihorario zx alrededor del eje y.

2.27 Sea $D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ el operador de derivación

(**a**) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Verificar que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale que

$$(D - \lambda I)^k \left[f(x)e^{\lambda x}\right] = f^{(k)}(x)e^{\lambda x}$$

para toda $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(**b**) Comprobar que $\operatorname{Nu}(D - \lambda I) = \operatorname{gen}\left\{e^{\lambda x}\right\}$.

(**c**) Para cada $k \in \mathbb{N}$ verificar que si

$$\operatorname{Nu}\left((D - \lambda I)^k\right) = \left\{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_{k-1}[x]\right\},$$

entonces

$$\operatorname{Nu}\left((D - \lambda I)^{k+1}\right) = \left\{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_{k}[x]\right\}.$$

: *escribir la ecuación* $(D - \lambda I)^{k+1}[y] = 0$ *en la forma* $(D - \lambda I)^k[z] = 0$*, donde* $z = (D - \lambda I)[y]$.

(**d**) Utilizar los incisos (**b**) y (**c**) junto al principio de inducción para demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\left\{x^i e^{\lambda x} : i \in [0 : k-1]\right\}$ es una base $\operatorname{Nu}\left((D - \lambda I)^k\right)$.

(**e**) Sea $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Comprobar que la ecuación

$$(D - \lambda I)^k[y] = g,$$

admite una solución particular de la forma $y_p = f(x)e^{\lambda x}$, donde $f^{(k)}(x) = g(x)e^{-\lambda x}$.

2.28 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

(**a**) $y' - y = 0$,

(**b**) $y' - y = e^{2x}$,

(**c**) $y' - y = xe^{2x}$,

(**d**) $y' - y = (3 + 5x)e^{2x}$,

(**e**) $y'' - 2y' + y = (3 + 5x)e^{2x}$,

(**f**) $(D - I)^3[y] = (3 + 5x)e^{2x}$.

2.29 ☢ Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean L y A dos transformaciones lineales de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ que satisfacen las siguientes propiedades

(i) $L \circ A = A \circ L$,
(ii) $\mathrm{Nu}(A \circ L)$ es de dimensión finita.

Verificar que

(**a**) $\mathrm{Nu}(L) + \mathrm{Nu}(A) \subseteq \mathrm{Nu}(A \circ L)$;

(**b**) si $w \in \mathrm{Nu}(A) \cap \mathrm{Im}(L)$, entonces toda solución de la ecuación $L(v) = w$ pertenece a $\mathrm{Nu}(A \circ L)$;

(**c**) si $w \in \mathrm{Nu}(A) \cap \mathrm{Im}(L)$ y si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathrm{Nu}(A \circ L)$ tal que $\mathrm{Nu}(L) \oplus \mathbb{S} = \mathrm{Nu}(A \circ L)$, entonces existe un único $v \in \mathbb{S}$ tal que $L(v) = w$;

: *repasar la demostración del teorema de la dimensión para las transformaciones lineales definidas en dominios de dimensión finita.*

(**d**) si además $\mathrm{Nu}(L) \cap \mathrm{Nu}(A) = \{0\}$, entonces

- para cada $w \in \mathrm{Nu}(A) \cap \mathrm{Im}(L)$ existe un único $v \in \mathrm{Nu}(A)$ tal que $L(v) = w$,
- $\mathrm{Nu}(A \circ L) = \mathrm{Nu}(A) \oplus \mathrm{Nu}(L)$.

2.30 STOP Se considera el operador diferencial $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ definido por

$$L := (D - 2)(D - 4)(D + 3)^2,$$

y la ecuación diferencial $L[y] = p$, donde $p(x) = 5x^3 e^{-3x}$.

(**a**) Hallar una base $\mathcal{B}_L$ de $\mathrm{Nu}(L)$.

(**b**) Comprobar que el operador $A = (D + 3I)^4$ es un *aniquilador* de p: $A[p] = 0$.

(**c**) Hallar una base $\mathcal{B}_{AL}$ de $\mathrm{Nu}(A \circ L)$ que contenga a la base $\mathcal{B}_L$.

(**d**) Comprobar que existe una solución particular y_p de la ecuación $L[y] = p$ perteneciente al subespacio $\text{gen}(\mathcal{B}_{AL} \setminus \mathcal{B}_L)$.

(**e**) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $L[y] = p$.

2.31 Para cada $\omega \in \{1, 7/4, 2\}$, hallar y graficar la solución del problema

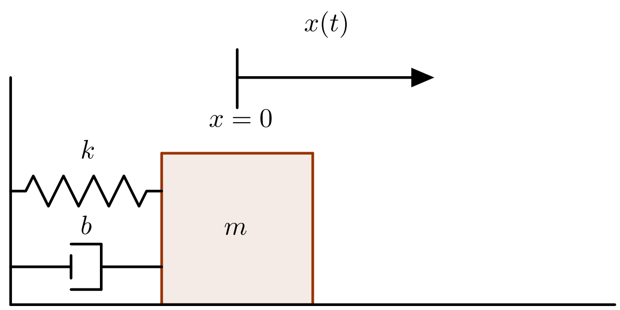
$$y'' + 4y = \cos(\omega t)$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 0$.

2.32 [ver **Ejercicio 1.17** y **Ejercicio 1.18**] Se considera la ecuación diferencial general

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0, \tag{1}$$

donde m, b y k son constantes positivas. Esta ecuación representa la dinámica de un sistema masa-resorte-amortiguador como el que se muestra en la figura



Sistema masa-resorte-amortiguador: m es la masa del objeto, k es la constante elástica del resorte y b es el coeficiente de roce viscoso del amortiguador.

(**a**) Mostrar que las raíces del polinomio característico de la ecuación (1) son

$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}.$$

(**b**) En cada uno de los siguientes casos, hallar la solución general x_h de la ecuación (1) en términos de las constantes b, m y $\Omega := \sqrt{\left|\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}\right|}$ y explicar por qué $\lim_{t\to+\infty} x_h(t) = 0$.

1. *Sobreamortiguado*: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$.
2. *Críticamente amortiguado*: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$
3. *Subamortiguado*: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$

(**c**) Para cada $b \in \{15, 20, 25, 30\}$ hallar y graficar la solución de la ecuación diferencial $4x'' + bx' + 25x = 0$ sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 1/2$, $x'(0) = 0$.

2.33 En cada uno de los siguientes casos construir una ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0,$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, del menor orden posible que tenga como soluciones a las funciones indicadas.

(**a**) $y_1 = e^t$, $y_2 = e^{2t}$;

(**b**) $y_1 = te^t$;

(**c**) $y_1 = t^2e^{2t}$;

(**d**) $y_1 = te^{4t}\operatorname{sen}(t)$;

(**e**) $y_1 = t$, $y_2 = \cos(3t)$, $y_3 = e^{-t}$.

2.34 Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ el operador diferencial

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y,$$

de orden mínimo tal que la ecuación diferencial $L[y] = 0$ tiene como soluciones a las funciones $y_1 = t$, $y_2 = e^{-2t}$ $y_3 = \cos(3t)$.

(**a**) Hallar la solución general de la ecuación diferencial homogénea $L[y] = 0$.

(**b**) Hallar una solución particular de la ecuación diferencial $L[y] = te^t$.

(**c**) Hallar una solución particular de la ecuación diferencial $L[y] = t$.

(**d**) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $L[y] = t\,(5 + 8e^t)$.

(**e**) Resolver el problema $L[y] = 0$ con las condiciones iniciales $y^{(i)}(0) = c_i$ para todo $i \in [0 : n-1]$.

(**f**) ¿Cómo deben ser las condiciones iniciales, $\left(y^{(i)}(0) : i \in [0 : n-1]\right)$ para que la solución del problema $L[y] = 0$ satisfaga que $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$?
